

Rozdział VII

Hipotezy wyężeniowe

Materiał konstrukcji w zależności od warunków obciążenia może się znajdować w różnych stanach naprężeń. Na początku procesu, przy stosunkowo niedużych obciążeniach będą to stany sprężyste, natomiast w miarę wzrostu obciążeń pojawiać się zaczną stany plastyczne, a w niektórych materiałach zniszczenia kruche. W warunkach eksploatacji określa się dopuszczalny poziom naprężeń, który nie powinien być przekroczony w żadnym punkcie konstrukcji. Najczęściej naprężenia ogranicza się tak, by cała konstrukcja pracowała w stanie sprężystym.

Opisane tu sytuacje wymagają odwzorowania złożonego stanu naprężenia na stan jednoosiowego rozciągania lub ściskania do czego służą hipotezy wyężeniowe. Złożony stan naprężenia reprezentuje wówczas naprężenie zredukowane σ_{zred} , które powinno być mniejsze od naprężenia dopuszczalnego σ_0 - ułamek granicy plastyczności R_e lub granicy proporcjonalności R_c .

$$\sigma_0 = \frac{R_e}{n} \quad \text{lub} \quad \sigma_0 = \frac{R_c}{n}$$

gdzie: n - współczynnik bezpieczeństwa.

Przy określaniu stanów naprężeń w konstrukcjach prętowych w pierwszym etapie dla danych obciążeń zewnętrznych poszukuje się przekrojów, w których wystąpi najniekorzystniejsza kombinacja sił wewnętrznych. Następnie w przekrojach tych poszukuje się najbardziej wyężonych punktów. Do ich określenia stosuje się hipotezy wyężeniowe pozwalające na porównanie złożonego stanu naprężeń ze stanem jednoosiowym.

W projektowaniu najczęściej wykorzystuje się hipotezę Hubera – Misesa – Hencky'ego (H–M–H) – energii odkształcenia postaciowego oraz hipotezę największego naprężenia stycznego Tresca – Guesta (T–G).

Hipotezy te mają postać

$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \leq \sigma_0$$

$$\sigma_{zred} = \max \left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right) \leq \sigma_0$$

gdzie: $\sigma_{11}, \dots, \sigma_{33}$ - współrzędne tensora naprężenia, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - naprężenia główne.

W obliczeniach praktycznych ważne są przypadki występowania naprężeń tnących σ_{13} , kiedy hipoteza H-M-H ma postać

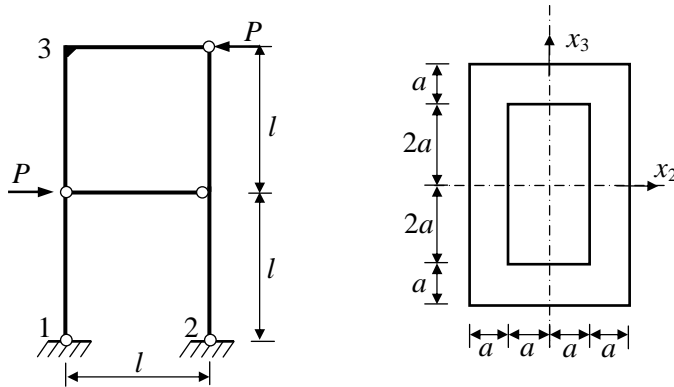
$$\sqrt{3\sigma_{13}^2} \leq \sigma_0 \rightarrow \sqrt{3}\sigma_{13} \leq \sigma_0$$

oraz jednoczesnego występowania naprężeń normalnych σ_{11} i tnących σ_{13} , wówczas

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{13}^2} \leq \sigma_0$$

ZADANIE 7.1.

Obliczyć potrzebne wymiary przekroju prętów z uwagi na naprężenia tnące i normalne dla układu prętowego jak na rys. 7.1a wykonanego z materiału nieliniowo – sprężystego ($\sigma = A \cdot \varepsilon^N$)



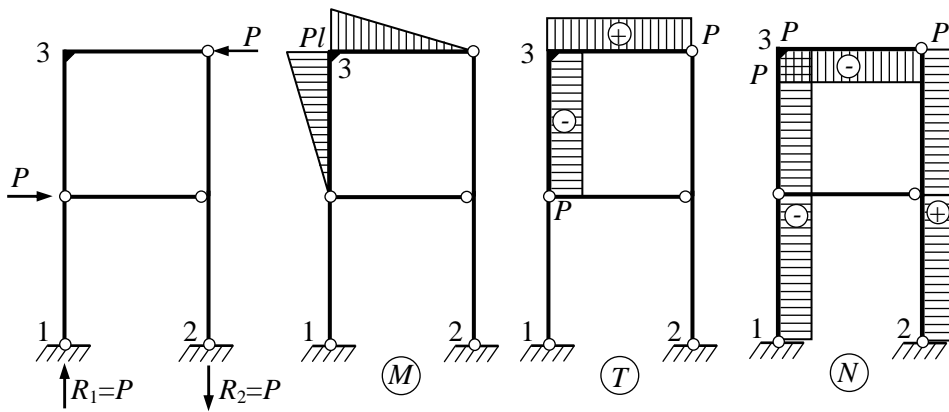
Rys. 7.1a

Dane: P, l, A, N, σ_0

Szukane: $a = ?$

Rozwiązanie:

W rozważanym układzie wyznaczamy reakcje podporowe i wykresy (rys. 7.1b)



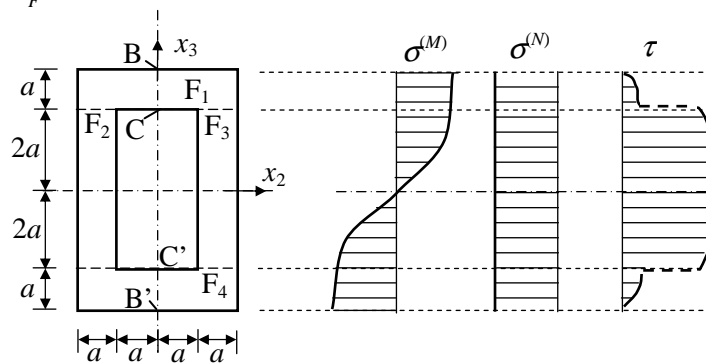
Rys. 7.1b

Wymiar a należy obliczyć z uwagi na najniekorzystniejszy zestaw sił wewnętrznych. Stąd do dalszych obliczeń bierzemy wartości momentów zginających, sił tnących i osiowych występujące w narożu 3.

$$M_{\max} = Pl, \quad T_{\max} = P, \quad N_{\max} = P$$

Następnie obliczamy moment bezwładności rzędu $N+1$ ze wzoru

$$J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF$$



Rys. 7.1c

Obszar F jest sumą następujących podobszarów

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

w związku z czym, możemy skorzystać z zależności

$$J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF = \int_{F_1} x_3^{N+1} dF_1 + \int_{F_2} x_3^{N+1} dF_2 + \int_{F_3} x_3^{N+1} dF_3 + \int_{F_4} x_3^{N+1} dF_4$$

Wówczas

$$\int_{F_1} x_3^{N+1} dF_1 = 4a \int_{2a}^{3a} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{4a}{N+2} [x_3^{N+2}]_{2a}^{3a} = \frac{4a^{N+3}}{N+2} (3^{N+2} - 2^{N+2})$$

$$\int_{F_2} x_3^{N+1} dF_2 = \int_{F_3} dF_3 = a \int_{-2a}^{2a} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{a}{N+2} [x_3^{N+2}]_{-2a}^{2a} = \frac{a^{N+3}}{N+2} (2^{N+2} - (-2)^{N+2})$$

$$\int_{F_4} x_3^{N+1} dF_4 = 4a \int_{-3a}^{-2a} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{4a}{N+2} [x_3^{N+2}]_{-3a}^{-2a} = \frac{4a^{N+3}}{N+2} [(-2)^{N+2} - (-3)^{N+2}]$$

A zatem

$$\begin{aligned} J(N+1) &= \frac{4a^{N+3}}{N+2} (3^{N+2} - 2^{N+2}) + \frac{2a^{N+3}}{N+2} [2^{N+2} - (-2)^{N+2}] + \\ &+ \frac{4a^{N+3}}{N+2} [(-3)^{N+2} - (-2)^{N+2}] = \frac{a^{N+3}}{N+2} [4 \cdot 3^{N+2} - 4 \cdot 2^{N+2} + \\ &+ 2 \cdot 2^{N+2} - 2 \cdot (-2)^{N+2} + 4 \cdot (-3)^{N+2} - 4 \cdot (-2)^{N+2}] = \\ &= \frac{2a^{N+3}}{N+2} (1 - (-1)^{N+2}) (2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2}) \end{aligned}$$

Do wyliczenia wymiarów przekroju konieczna jest znajomość naprężeń normalnych i stycznych w najbardziej wyężonym punkcie przekroju 3. W analizowanym zadaniu punktem tym jest punkt *C*.

Dla punktu *C* wyliczamy wielkości naprężeń normalnych σ_{11} i naprężeń tnących σ_{13} , korzystając ze wzorów dla materiału nieliniowo sprężystego ($\sigma = A\varepsilon^N$).

Naprężenia normalne dla uproszczenia rozważań wyznaczymy pomijając wpływ siły osiowej

$$\sigma_{11} = \frac{M_{\max}}{J(N+1)} x_3^N$$

$$x_3 = 2a$$

$$\sigma_{11} = \frac{Pl(N+2) \cdot 2^{N-1}}{a^3(1-(-1)^{N+2})(2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})}$$

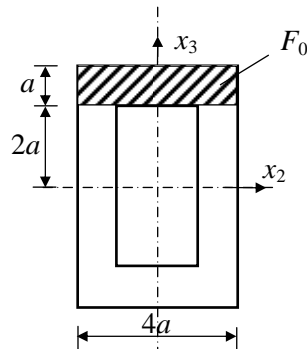
Naprężenie styczne wyliczamy ze wzoru

$$\sigma_{13} = \frac{T_{\max} S_N}{d \cdot J(N+1)}$$

gdzie $S_N = \int_{F_0} x_3^N dF$ - moment statyczny rzędu N części przekroju F_0 ponad

analizowanym punktem, $d=2a$ – szerokość przekroju.

Dla rozważanego pola F_0 (rys. 7.1d) moment statyczny S_N wynosi



Rys. 7.1d

$$S_N = 4a \int_{2a}^{3a} x_3^N dx_3 = \frac{4a}{N+1} [x_3^{N+1}]_{2a}^{3a} = \frac{4a^{N+2}}{N+1} (3^{N+1} - 2^{N+1})$$

Wówczas otrzymamy

$$\sigma_{13} = \frac{P(3^{N+1} - 2^{N+1})(N+2)}{a^2(N+1)(1-(-1)^{N+2})(2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})}$$

Aby zaprojektować przekrój skorzystamy z hipotezy (H-M-H). Wzór na naprężenia zredukowane dla płaskiego stanu naprężeń ma postać

$$\sigma_{zred.} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{13}^2} \leq \sigma_0$$

W związku z powyższym ze wzoru

$$\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_0^2$$

z którego po podstawieniu wyrażień na naprężenia σ_{11} i σ_{13} otrzymamy równanie algebraiczne względem grubości a

$$\frac{P^2 l^2 (N+2)^2 \cdot 2^{2N-2}}{a^6 (1 - (-1)^{N+2})^2 (2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})^2} + \frac{3P^2 (3^{N+1} - 2^{N+1})^2 (N+2)^2}{a^4 (N+1)^2 (1 - (-1)^{N+2})^2 (2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})^2} = \sigma_0^2$$

Pierwiastek tego równania jest poszukiwaną wartością grubości ścianki przekroju skrzynkowego.

Aby rozwiązać to równanie zapiszemy je w postaci

$$\alpha^2 \frac{1}{a^6} + 3\beta^2 \frac{1}{a^4} - \sigma_0^2 = 0 \quad | a^6$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 a^2 - \sigma_0^2 a^6 = 0$$

gdzie

$$\alpha = \frac{Pl(N+2)2^{N-1}}{(1 - (-1)^{N+2})(2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})}$$

$$\beta = \frac{P(3^{N+1} - 2^{N+1})(N+2)}{(N+1)(1 - (-1)^{N+2})(2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})}$$

Stosując podstawienie $a^2 = t$ otrzymamy

$$\sigma_0^2 t^3 - 3\beta^2 t - \alpha^2 = 0$$

Jest to równanie stopnia trzeciego typu

$$bt^3 + ct^2 + dt + e = 0 \quad \text{gdzie } b \neq 0$$

Dzieląc równanie przez b i podstawiając

$$t = y - \frac{c}{3b}$$

otrzymamy

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

gdzie

$$3p = \frac{3bd - c^2}{3b^2} \quad \text{i} \quad 2q = \frac{2c^3}{27b^3} - \frac{cd}{3b^2} + \frac{e}{b}$$

W naszym przypadku

$$\left. \begin{array}{l} b = \sigma_0^2 \\ c = 0 \\ d = -3\beta^2 \\ e = -\alpha^2 \end{array} \right\}$$

a zatem

$$t = y \quad \text{oraz} \quad 3p = -\frac{3\beta^2}{\sigma_0^2}; \quad 2q = -\frac{\alpha^2}{\sigma_0^2}$$

Jest to równanie postaci

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{\beta^2}{\sigma_0^2}, \quad q = -\frac{\alpha^2}{2\sigma_0^2}$$

Wprowadzamy zmianę pomocniczą: $r = \eta\sqrt{|p|}$ gdzie η oznacza (+1) lub (-1), zgodnie ze znakiem q . U nas $q < 0$, toteż $\eta = -1$

$$r = -\sqrt{\left|-\frac{\beta^2}{\sigma_0^2}\right|} = -\frac{\beta}{\sigma_0}$$

W analizowanym równaniu ilość pierwiastków rzeczywistych zależy od znaku wyróżnika $D = q^2 + p^3$ oraz znaku p

$$D = \frac{\alpha^4}{4\sigma_0^4} - \frac{\beta^6}{\sigma_0^6} \quad \text{zaś} \quad p < 0$$

Możliwe są dwa typy rozwiązań:

1°) Gdy $D = \frac{\alpha^4 \sigma_0^2 - 4\beta^6}{4\sigma_0^6} \leq 0$ i $p < 0$ wtedy istnieją 3 pierwiastki

rzeczywiste

$$\left. \begin{aligned} t_1 = y_1 &= -2r \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right) \\ t_2 = y_2 &= 2r \cos\left(60^\circ - \frac{1}{3}\varphi\right) \\ t_3 = y_3 &= 2r \cos\left(60^\circ + \frac{1}{3}\varphi\right) \end{aligned} \right\}$$

gdzie

$$\varphi = \arccos\left(\frac{q}{r^3}\right) = \arccos\left(\frac{\alpha^2 \sigma_0}{2\beta^3}\right)$$

2°) Gdy $D = \frac{\alpha^4 \sigma_0^2 - 4\beta^6}{4\sigma_0^6} > 0$ i $p < 0$ wtedy istnieje jeden pierwiastek

rzeczywisty

$$t_1 = -2r \cdot \cosh\left(\frac{1}{3}\varphi\right)$$

gdzie

$$\cosh \varphi = \frac{q}{r^3} = \frac{\alpha^2 \sigma_0}{2\beta^3}$$

W rozwiązaniach praktycznych spotykamy się z drugim wariantem, tzn. $D > 0$ i $p < 0$, w którym istnieje tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.

Poszukiwaną wartość wymiaru a wyliczamy ze wzoru

$$a = \sqrt{t}, \quad \text{gdzie } t > 0$$

W rozwiązaniu tym nie uwzględniono naprężeń normalnych od sił osiowych. Dla dokładniejszego wyznaczenia wymiaru a należy wziąć je pod uwagę. Wtedy naprężenie normalne σ_{11} jest sumą naprężeń normalnych od działania momentów zginających i sił osiowych.

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(N)} + \sigma_{11}^{(M)} = \frac{N_{\max}}{F} + \frac{M_{\max}}{J(N+1)} x_3^N$$

gdzie $F = 4a \cdot 6a - 2a \cdot 4a = 16a^2$ - pole przekroju

Wówczas warunek na poszukiwany wymiar a przyjmie postać

$$(\sigma_{11}^{(N)} + \sigma_{11}^{(M)}) + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_0^2$$

Stąd dla rozpatrywanego przekroju 3 otrzymamy równanie

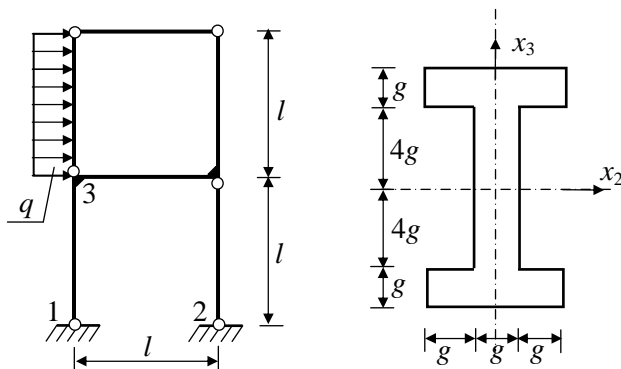
$$\left[\frac{Pl(N+2) \cdot 2^{N-1}}{a^3(1-(-1)^{N+2})(2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})} + \frac{P}{16a^2} \right]^2 + \frac{3P^2(3^{N+1} - 2^{N+1})^2(N+2)^2}{a^4(N+1)^2(1-(-1)^{N+2})^2(2 \cdot 3^{N+2} - 2^{N+2})} - \sigma_0^2 = 0$$

Dodatni pierwiastek tego równania jest poszukiwaną wielkością a .

ZADANIE 7.2.

Obliczyć potrzebną grubość środnika dwuteownika, z którego wykonany jest układ prętowy jak na rys. 7.2a. Materiał układu jest nieliniowo – sprężysty ($\sigma = A\varepsilon^N$)

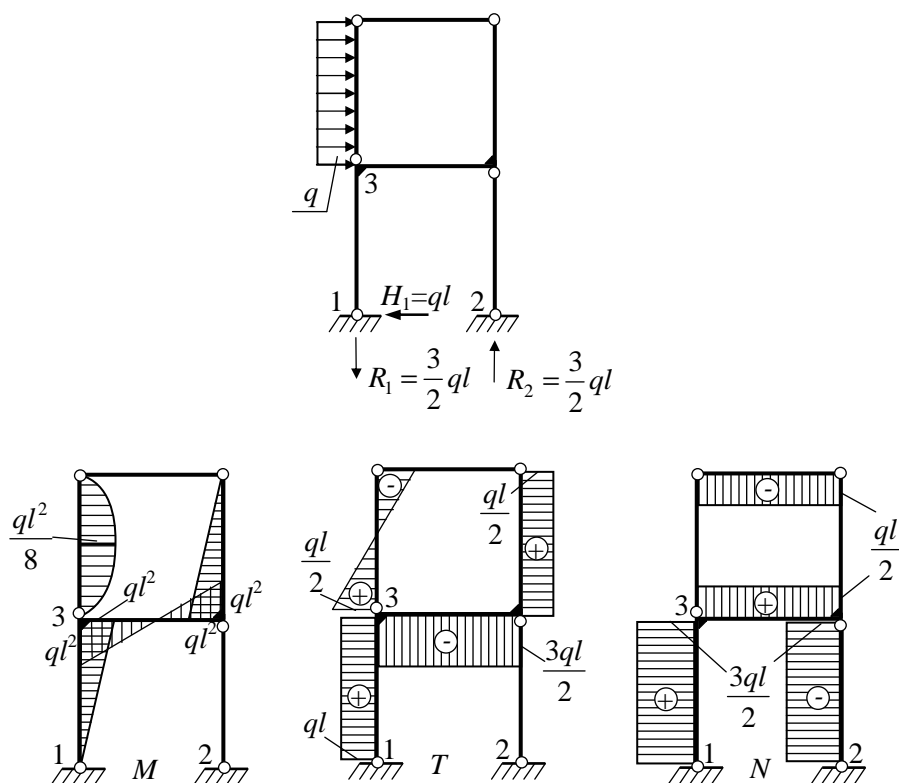
Dane: $q, l, A, \sigma_0, g = ?$



Rys. 7.2a

Rozwiązanie:

W podanym układzie wyznaczamy reakcje podporowe i wykresy (rys. 7.2b)



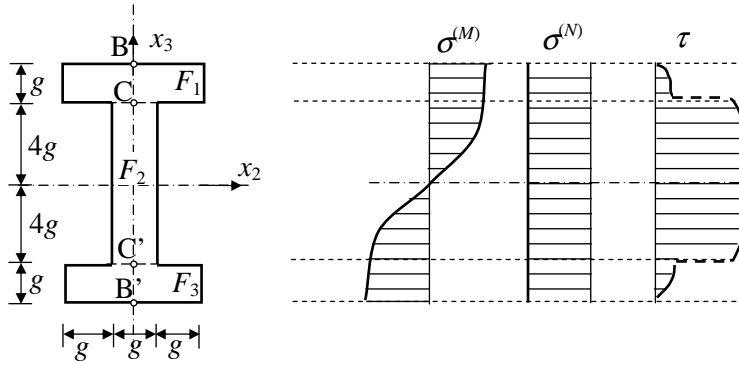
Rys. 7.2b

Wymiar g należy zaprojektować na najniekorzystniejszy zestaw sił wewnętrznych. Stąd do dalszych obliczeń bierzemy wartość momentów zginających, sił tnących i osiowych z przekroju przywęzłowego naroża 3 ze strony pionowej

$$M_{\max} = ql^2, \quad T_{\max} = \frac{3}{2} ql, \quad N_{\max} = \frac{1}{2} ql$$

Moment bezwładności rzędu $N+1$ potrzebny do późniejszych obliczeń wyznaczmy ze wzoru

$$J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF$$



Rys. 7.2c

Obszar F jest sumą trzech podobszarów F_1 , F_2 i F_3

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

W związku z czym moment bezwładności $J(N+1)$ wyliczamy z zależności

$$J(N+1) = \int_F x_3^{N+1} dF = \int_{F_1} x_3^{N+1} dF_1 + \int_{F_2} x_3^{N+1} dF_2 + \int_{F_3} x_3^{N+1} dF_3$$

Wówczas

$$\int_{F_1} x_3^{N+1} dF_1 = 3g \int_{4g}^{5g} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{3g}{N+2} [x_3^{N+2}]_{4g}^{5g} = \frac{3g^{N+3}}{N+2} (5^{N+2} - 4^{N+2})$$

$$\int_{F_2} x_3^{N+1} dF_2 = g \int_{-4g}^{4g} x_3^{N+1} dx_3 = \frac{g}{N+2} [x_3^{N+2}]_{-4g}^{4g} = \frac{g^{N+3}}{N+2} (4^{N+2} - (-4)^{N+2})$$

$$\int_{F_3} x_3^{N+1} dF_3 = 3g \int_{-5g}^{-4g} x_3^{N+1} dx_3 = -\frac{3g}{N+2} [x_3^{N+2}]_{-5g}^{-4g} = \frac{3g^{N+3}}{N+2} [(-4)^{N+2} - (-5)^{N+2}]$$

A zatem

$$\begin{aligned} J(N+1) &= \frac{3g^{N+3}}{N+2} (5^{N+2} - 4^{N+2}) + \frac{g^{N+3}}{N+2} [4^{N+2} - \\ &\quad - (-4)^{N+2}] + \frac{3g^{N+3}}{N+2} [(-4)^{N+2} - (-5)^{N+2}] = \\ &= \frac{g^{N+3}}{N+2} [3 \cdot 5^{N+2} - 3 \cdot 4^{N+2} + 4^{N+2} - \\ &\quad - (-4)^{N+2} + 3 \cdot (-4)^{N+2} - 3 \cdot (-5)^{N+2}] = \\ &= \frac{g^{N+3}}{N+2} [1 - (-1)^{N+2}] (3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2}) \end{aligned}$$

Do wyliczenia wymiarów przekroju potrzebne będą nam wartości naprężeń normalnych i stycznych w najbardziej wyężonym punkcie przekroju, tzn. w punkcie C.

Dla punktu C wyliczymy wielkości naprężeń normalnych σ oraz naprężeń tnących τ w oparciu o wzory dla materiału nieliniowo – sprężystego ($\sigma = A \cdot \varepsilon^N$).

Naprężenia normalne dla uproszczenia rozważań wyznaczamy pomijając wpływ siły osiowej

$$\sigma_{11} = \frac{M_{\max}}{J(N+1)} x_3^N$$

$$x_3 = 4g$$

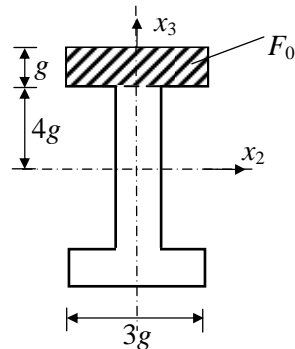
$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{ql^2(N+2)4^N \cdot g^N}{g^{N+3}[1-(-1)^{N+2}](3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})} = \\ &= \frac{ql^2(N+2)4^N}{g^3[1-(-1)^{N+2}](3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})} \end{aligned}$$

Naprężenia styczne wyliczamy ze wzoru

$$\sigma_{13} = \frac{T_{\max} \cdot S_N}{d \cdot J(N+1)}$$

gdzie $S_N = \int_{F_0} x_s^N dF$ - moment statyczny rzędu N części przekroju F_0 ponad

analizowanym punktem, $d = g$ – szerokość przekroju



Rys. 7.2d

Dla rozważanego pola F_0 (rys. 7.2d) moment statyczny S_N wynosi

$$S_N = 3g \int_{4g}^{5g} x_3^N dx_3 = \frac{3g}{N+1} [x_3^{N+1}]_{4g}^{5g} = \frac{3g^{N+2}}{N+1} (5^{N+1} - 4^{N+1})$$

Wykorzystując powyższe zależności otrzymamy

$$\sigma_{13} = \frac{9ql(5^{N+1} - 4^{N+1})(N+2)}{2g^2[1 - (-1)^{N+2}](3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})(N+1)}$$

W celu zaprojektowania przekroju skorzystamy z hipotezy H-M-H. Wzór na naprężenia zredukowane dla płaskiego stanu naprężeń ma postać

$$\sigma_{zred.} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{13}^2} \leq \sigma_0$$

W naszym zadaniu poszukiwaną wartość g wyliczymy z równania

$$\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_0^2$$

$$\frac{q^2 l^4 (N+2)^2 4^{2N}}{g^6 [1 - (-1)^{N+2}]^2 (3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})^2} + \frac{243q^2 l^2 (5^{N+1} - 4^{N+1})^2 (N+2)^2}{4g^4 [1 - (-1)^{N+2}]^2 (3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})^2 (N+1)^2} - \sigma_0^2 = 0$$

Pierwiastek powyższej zależności jest poszukiwaną wartością wymiaru g . Aby rozwiązać to równanie sprowadzimy je do postaci

$$\alpha^2 \frac{1}{g^6} + 3\beta^2 \frac{1}{g^4} - \sigma_0^2 = 0 \quad | \cdot g^6$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 g^2 - \sigma_0^2 g^6 = 0$$

gdzie

$$\alpha = \frac{ql^2 (N+2) 4^N}{(1 - (-1)^{N+2})(3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})}$$

$$\beta = \frac{9ql(5^{N+1} - 4^{N+1})(N+2)}{2(N+1)(1 - (-1)^{N+2})(3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})}$$

Stosując podstawienie $g^2 = t$ otrzymamy

$$\alpha^2 + 3\beta^2 t - \sigma_0^2 t^3 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\sigma_0^2 t^3 - 3\beta^2 t - \alpha^2 = 0$$

jest to równanie stopnia trzeciego typu

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \quad \text{gdzie } a \neq 0$$

dzieląc równania przez a i podstawiając

$$t = y - \frac{b}{3a} \quad \text{otrzymamy} \quad y^3 + 3py + 2q = 0$$

gdzie

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{i} \quad 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

W naszym przypadku

$$\left. \begin{array}{l} a = \sigma_0^2 \\ b = 0 \\ c = -3\beta^2 \\ d = -\alpha^2 \end{array} \right\}$$

a zatem

$$t = y \quad \text{oraz} \quad 3p = -\frac{3\beta^2}{\sigma_0^2}; \quad 2q = -\frac{\alpha^2}{\sigma_0^2}$$

Jest to równanie postaci

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{\beta^2}{\sigma_0^2}, \quad q = -\frac{\alpha^2}{2\sigma_0^2}$$

Wyprowadzamy zmienną pomocniczą $r = \eta\sqrt{|p|}$, gdzie η oznacza (+1) lub (-1), zgodnie ze znakiem q . U nas $q < 0$, toteż $\eta = -1$

$$r = -\sqrt{\left| -\frac{\beta^2}{\sigma_0^2} \right|} = \frac{-\beta}{\sigma_0}$$

W analizowanym równaniu ilość pierwiastków rzeczywistych zależy od znaku wyróżnika $D = q^2 + p^3$ oraz znaku p

$$D = \frac{\alpha^4}{4\sigma_0^4} - \frac{\beta^6}{\sigma_0^6} \quad \text{zaś} \quad p < 0$$

Wówczas możliwe są dwa typy rozwiązań

a) Gdy $D = \frac{\alpha^4 \sigma_0^2 - 4\beta^6}{4\sigma_0^6} \leq 0$ i $p < 0$ wtedy istnieją 3 pierwiastki rzeczywiste

$$\left. \begin{aligned} t_1 = y_1 &= -2r \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right) \\ t_2 = y_2 &= 2r \cos\left(60^\circ - \frac{1}{3}\varphi\right) \\ t_3 = y_3 &= 2r \cos\left(60^\circ + \frac{1}{3}\varphi\right) \end{aligned} \right\}$$

gdzie

$$\varphi = \arccos\left(\frac{q}{r^3}\right) = \arccos\left(\frac{\alpha^2 \sigma_0}{2\beta^3}\right)$$

b) Gdy $D = \frac{\alpha^4 \sigma_0^2 - 4\beta^6}{4\sigma_0^6} > 0$ i $p < 0$ wtedy istnieje jeden pierwiastek rzeczywisty

$$t_1 = -2r \cosh\left(\frac{1}{3}\varphi\right)$$

gdzie

$$\cosh \varphi = \frac{q}{r^3} = \frac{\alpha^2 \sigma_0}{2\beta^3}$$

W rozwiązaniach praktycznych spotykamy się z drugim wariantem, tzn. gdy $D > 0$ i $p < 0$, w którym istnieje tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.

Poszukiwaną wartość g równania wyliczamy ze wzoru

$$g = \sqrt{t}, \quad \text{gdzie } t > 0$$

W rozwiązaniu tym nie uwzględniono naprężeń normalnych od sił osiowych. W celu dokładniejszego wyznaczenia wymiaru g należy wziąć je pod uwagę. Wtedy naprężenie normalne jest sumą naprężenia normalnego od działania momentów zginających i sił osiowych.

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(N)} + \sigma_{11}^{(M)} = \frac{N_{\max}}{F} + \frac{M_{\max}}{J(N+1)} x_3^N$$

gdzie

$$F = 2 \cdot 3g \cdot g + 8g \cdot g = 14g^2 \quad \text{- pole przekroju}$$

Wówczas warunek na poszukiwany wymiar g przyjmie postać

$$(\sigma_{11}^{(N)} + \sigma_{11}^{(M)}) + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_0^2$$

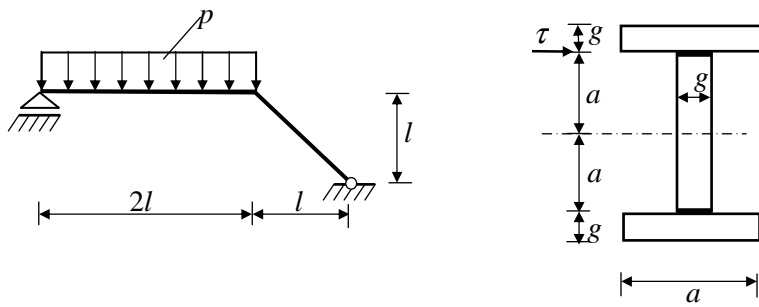
Stąd dla rozpatrywanego przekroju 3 otrzymamy równanie

$$\left[\frac{qt^2(N+2)4^N}{g^3[1-(-1)^{N+2}](3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})} + \frac{ql}{28g^2} \right]^2 + \frac{243q^2t^2(5^{N+1} - 4^{N+1})^2(N+2)^2}{4(N+1)^2g^4[1-(-1)^{N+2}]^2(3 \cdot 5^{N+2} - 2 \cdot 4^{N+2})^2} - \sigma_0^2 = 0$$

Pierwiastek tego równania jest poszukiwaną, dokładną wartością wymiaru g .

ZADANIE 7.3.

Dla układu prętowego (rys. 7.3a) o przekroju dwuteowym wykonanego z materiału nieliniowo – sprężystego ($\sigma = A\varepsilon^N$) obliczyć potrzebną grubość środnika dwuteownika



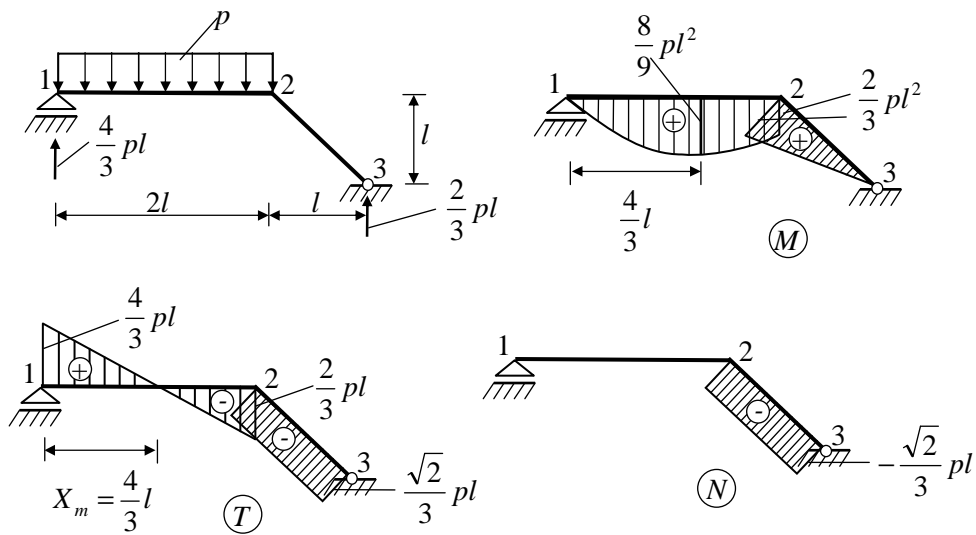
Rys. 7.3a

Dane: $p, l, a = 4g, \sigma_0$

Szukane: $g = ?$

Rozwiązanie:

W podanym układzie wyznaczamy wielkości reakcji podporowych i wykresy sił wewnętrznych (rys. 7.3b)



Rys. 7.3b

Do obliczeń bierzemy wartości momentów, sił tnących i osiowych w najbardziej niekorzystnym przekroju z uwagi na naprężenia tnące. Jest nim przekrój w narożu 2 z lewej strony.